Вопросы к коллоквиуму
“Компактные множества в метрических пространствах.
Нормированные пространства. Евклидовы пространства.”
Функциональный анализ
БПМ 221-223, 2-й модуль, 3-й курс
2024/2025 учебный год
В. Лебедев

На коллоквиуме студент получает два вопроса из этого вопросника. Коллоквиум имеет характер блиц-опроса. Время на подготовку 5 минут, на ответ 2–3 минуты. Студент должен продемонстрировать знание определений и формулировок утверждений. Доказывать утверждения не требуется, если не указано обратное. Пользоваться вопросником разрешается.

1. Дайте определение вполне ограниченного множества в метрическом пространстве. Приведите примеры.

2. Что называется ε -сетью для множества K в метрическом пространстве? Дайте эквивалентное определение вполне ограниченного множества в терминах ε -сетей.

3. Верно ли, что всякое вполне ограниченное множество является ограниченным? Верно ли обратное (рассмотрите шар в l^2)?

4. Как связаны свойства ограниченности и вполне ограниченности в R^n? Ответ поясните.

5. Дайте определение компактного множества в метрическом пространстве. Приведите примеры. Сформулируйте теорему о связи вполне ограниченности и компактности (в полных метрических пространствах).

6. Сформулируйте теорему Вейерштрасса о непрерывных функциях на компактных множествах. Приведите пример, показывающий, что условие компактности множества в этой теореме нельзя заменить условием ограниченности и замкнутости.

7. Сформулируйте теорему Арцела (критерий вполне ограниченности множества в $C[a,b]$). Проиллюстрируйте ее применение на примерах.

8. Сформулируйте критерии вполне ограниченности множества в l^2 и l^1. Проиллюстрируйте их применения (например, рассмотрите “гильбертов кирпич”).

9. Дайте определение линейного нормированного пространства. Приведите примеры. Как задается естественная метрика в линейном нормированном пространстве?

10. Что такое банахово пространство. Что называют (замкнутым) подпространством линейного нормированного пространства? Приведите примеры. Является ли множество векторов $x = (x_1, x_2, \ldots)$ таких, что $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0$ линейным замкнутым подпространством в l^1? В l^2?

11. Что такое эквивалентные нормы? Являются ли нормы $\|x\|_1 = \max_{[0,1]} |x(t)|$ и $\|x\|_2 = \int_0^1 |x(t)| dt$ эквивалентными нормами в пространстве непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$? Сформулируйте утверждение об эквивалентности норм в конечномерном пространстве.

12. Дайте определение линейно изоморфных и линейно изометрических нормированных пространств. Являются ли изоморфными l^1 и l^2; $C([0, 1])$ и l^2; l^∞ и $C([0, 1])$?

13. Сформулируйте утверждение об изоморфизме конечномерных пространств. Являются ли изоморфными l_n^1 и l_n^2.

14. Сформулируйте лемму о почти перпендикуляре и теорему о вполне ограниченности шара в линейном нормированном пространстве.

15. Дайте определение сходящегося ряда в линейном нормированном пространстве и его суммы. Сформулируйте необходимое условие сходимости ряда и достаточное условие сходимости ряда в (банаховом пространстве) в терминах норм членов ряда.

16. Дайте определение базиса в нормированном пространстве. Покажите, что всякое нормированное пространство с базисом сепарабельно.

17. Дайте определение евклидова пространства. Запишите неравенство Коши – Буняковского – Шварца. Как определяется естественная норма в евклидовом пространстве? Что такое гильбертово пространство?

18. Выведите равенство параллелограмма в евклидовом пространстве. Сформулируйте критерий того, что норма в нормированном пространстве порождена скалярным произведением.

19. Когда говорят, что два вектора в евклидовом пространстве ортогональны? Дайте определение ортогональной системы векторов в евклидовом пространстве. Что называют ортонормированной системой векторов? Что такое ортонормированная система векторов. Сформулируйте критерий сходимости ряда, члены которого образуют ортогональную систему в гильбертовом пространстве.

20. Сформулируйте задачу о наилучшем приближении в общем случае метрических пространств; дайте определение элемента наилучшего приближения. Дайте определение ортогональной проекции вектора на подпространство в гильбертовом пространстве. Сформулируйте утверждение о существовании и единственности ортогональной проекции вектора на подпространство. Как связаны проекция и элемент наилучшего приближения в гильбертовом пространстве?

21. Дайте определение линейной оболочки системы векторов в линейном нормированном пространстве. Дайте определение полной системы векторов. Приведите примеры.

22. Запишите формулу для ортогональной проекции вектора на подпространство $\Pi =< e_1, e_2, \ldots, e_N >$, являющееся линейной оболочкой конечной системы векторов $e_1, e_2, \ldots, e_N$, образующих ортонормированную систему в евклидовом пространстве.

23. Сформулируйте теорему о том, что полная ортонормированная система в гильбертовом пространстве является базисом и теорему о разложении в ряд Фурье по полной ортонормированной системе в гильбертовом пространстве. Запишите равенство Парсеваля.

24. Изложите процедуру ортогонализации. Как связаны линейные оболочки линейно независимой системы векторов и системы, полученной ее ортогонализацией?

25. Сформулируйте теорему о существовании ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Как он строится? Приведите примеры таких базисов.

26. Докажите теорему об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.