Время, отведенное на выполнение работы, — 150 минут. Все решения должны быть обоснованы.

Задача 1. Найдите $y^{(n)}(x)$ для функции

$$y = \ln\left((2x+3)^{2x+3}\right), \quad x > -\frac{3}{2}.$$

Задача 2. Найдите вторую производную обратной к функции $y = x \cdot e^x + x$ в точке $y_0 = e + 1$.

Задача 3. Вычислите предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^3 + 3\ln\left(1 + x^3\right) + \operatorname{arctg}\left(x^6\right)}{e^{x^3} - \cos x^2}.$$

Задача 4. Обозначим через a_1, a_2, a_3, a_4 соответственно первый, второй, третий и четвёртый столбцы матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R})$. Положим

$$b_1 = a_1 - 3a_2,\; b_2 = -a_1 + 4a_2 + a_3,\; b_3 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4,\; b_4 = -a_1 + a_2 + 2a_3 - 2a_4.$$

Чему равен определитель матрицы B со столбцами b_1, b_2, b_3, b_4, если определитель матрицы A равен 7?

Задача 5. Комплексное число w таково, что один из его корней 6-й степени является решением уравнения $(\sqrt{3} - 2i)z = -\sqrt{2} + 3\sqrt{6}i$. Найдите все корни 6-й степени из w.

Задача 6. Найдите все значения параметра a, при которых матрица $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ представима в виде суммы двух матриц ранга 1, и для каждого найденного значения укажите такое представление.

Задача 7. Пусть f и g — функции из X в Y (не обязательно всюду определенные). Известно, что для некоторого множества $A \subseteq Y$ пересечение $f^{-1}(A) \cap g^{-1}(A)$ непусто. Следует ли отсюда, что $f(x) = g(x)$ для некоторого x?

Задача 8. На прямой расположено семейство отрезков ненулевой длины, причем известно, что среди любых трех отрезков хотя бы два не пересекаются. Может ли это семейство быть континуально?

Задача 9. Известно, что в простом неориентированном графе G имеется $2m$ вершин, $m > 0$. Всегда ли верно, что найдутся две его различные вершины, у которых четное число (возможно, 0) общих соседей?